

Cap 2.

Massa ed energia nell'universo

Il quadrivettore impulso ed energia

Oggetti di massa nulla: il fotone

Applicazioni dell'effetto Doppler:

la scoperta dei pianeti extrasolari,

materia oscura

energia oscura

Massa ed energia

Scale di massa nell'universo

L'energia di legame di nuclei e atomi

Dalla meccanica classica alla meccanica relativistica

- La meccanica di Newton è invariante per trasformazioni di Galileo, non di Lorentz.
- Per costruire una meccanica invariante per trasformazioni di Lorentz dobbiamo cambiare alcuni postulati della meccanica di Newton
- La nuova meccanica, nel limite $v \ll c$, deve ridursi alla meccanica di Newton.
- Come dice Feynman, tutto si riduce a sostituire :

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$$

- Dove m è la massa della particella, misurata nel suo riferimento di quiete (la massa a riposo).*
- Per realizzare questo programma, per prima cosa riassumiamo la meccanica classica, e quindi vediamo che cosa comporta la nuova definizione dell'impulso.
- * *Vecchi testi distinguono la massa a riposo m dalla massa di un corpo in moto ($m\gamma$), ma si tratta di introdurre un concetto non necessario (e sostanzialmente non misurabile).*

Sommario di meccanica:

- 1) La relazione fra la forza applicata a un corpo e l'impulso dello stesso è data da:

$$d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F}$$

- 2) L'energia di un corpo è definita, a meno di una costante additiva, da:

$$dE/dt = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$$

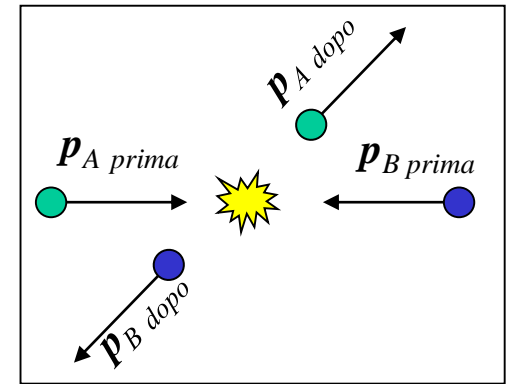
- 3) In un processo d'urto elastico fra due corpi A e B le forze che si esercitano fra i corpi sono tali che $\mathbf{F}_{AB} = -\mathbf{F}_{BA}$ e $\mathbf{F}_{AB} \cdot \mathbf{v}_B = -\mathbf{F}_{BA} \cdot \mathbf{v}_A$.

- Da 3) segue immediatamente la conservazione dell'impulso e dell'energia.

3a) $(\mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B)_{\text{prima}} = (\mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B)_{\text{dopo}}$

3b) $(E_A + E_B)_{\text{prima}} = (E_A + E_B)_{\text{dopo}}$

- Le ipotesi 1-3 le terremo sempre valide, sia nel caso classico che in quello relativistico.



Meccanica classica

•Dimostriamo che se definisco $\mathbf{p} = m \mathbf{v}$, ottengo $E = \frac{1}{2} m v^2$ e leggi di conservazione invarianti per trasformazioni di Galileo.

•Infatti da 2) e 1):

$$dE/dt = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = (d\mathbf{p}/dt) \cdot \mathbf{v} = m (d\mathbf{v}/dt) \cdot \mathbf{v} = d(\frac{1}{2} m v^2)/dt .$$

Da questa ricavo $E = \frac{1}{2} m v^2 + \text{const}$, ma la costante è inessenziale, perché misuro sempre e soltanto variazioni di energia, dunque la posso porre uguale a zero ed ottenere $E = \frac{1}{2} m v^2$.

•Per trasformazioni di Galileo, passando da un riferimento S a un riferimento S' in moto con velocità relativa \mathbf{u} , ho $\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{u}$ e quindi:

$$\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}' = \mathbf{p} - m\mathbf{u} \quad ; \quad E \rightarrow E' = \frac{1}{2} m v'^2 = \frac{1}{2} m (\mathbf{v} - \mathbf{u})^2 = E - \mathbf{p} \cdot \mathbf{u} + \frac{1}{2} m u^2 .$$

Se la conservazione dell' impulso vale in un riferimento S, $(\mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B)_{\text{prima}} = (\mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B)_{\text{dopo}}$, allora in S' :

$$\begin{aligned} (\mathbf{p}'_A + \mathbf{p}'_B)_{\text{prima}} &= (\mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B)_{\text{prima}} - (m_A + m_B)\mathbf{u} = \\ &= (\mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B)_{\text{dopo}} - (m_A + m_B)\mathbf{u} = (\mathbf{p}'_A + \mathbf{p}'_B)_{\text{dopo}} \end{aligned}$$

•Se la conservazione dell' energia vale in S, $(E_A + E_B)_{\text{prima}} = (E_A + E_B)_{\text{dopo}}$ allora in S' :

$$\begin{aligned} (E'_A + E'_B)_{\text{prima}} &= (E_A + E_B)_{\text{prima}} - (\mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B)_{\text{prima}} \cdot \mathbf{u} + \frac{1}{2} (m_a + m_b) u^2 = \\ &= (E_A + E_B)_{\text{dopo}} - (\mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B)_{\text{dopo}} \cdot \mathbf{u} + \frac{1}{2} (m_a + m_b) u^2 = (E'_A + E'_B)_{\text{dopo}} \end{aligned}$$

Meccanica relativistica: il quadrivettore energia impulso

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$$

• Dimostriamo che se definisco $\mathbf{p} = m \gamma \mathbf{v}$, ottengo $E = m \gamma c^2$ e leggi di conservazione invarianti per trasformazioni di Lorentz.

• Infatti da 2) e 1):

$$dE/dt = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = (d\mathbf{p}/dt) \cdot \mathbf{v} = d(m \gamma \mathbf{v})/dt \cdot \mathbf{v} = d(m \gamma c^2)/dt.$$

Da questa ricavo $E = m \gamma c^2 + \text{const}$, ma la costante è inessenziale, perché misuro sempre e soltanto variazioni di energia, dunque la posso porre uguale a zero ed ottenere

$$E = m \gamma c^2.$$

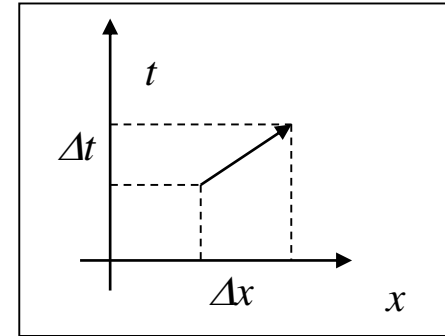
• Osservo che per trasformazioni di Lorentz, la quantità $P = (E, \mathbf{pc})$ è un quadrivettore

1) Infatti posso scrivere :

$$E = m \gamma c^2 = mc^2 \Delta t / \Delta \tau, \quad \mathbf{pc} = m c \gamma \mathbf{v} = m c \gamma \Delta \mathbf{x} / \Delta t = m c \Delta \mathbf{x} / \Delta \tau,$$

dove $\Delta \mathbf{x}$ e Δt sono lo spostamento e il tempo misurati in uno stesso riferimento mentre $\Delta \tau$ è l'intervallo di tempo corrispondente nel riferimento di quiete del corpo (tempo proprio)

2) A questo punto posso scrivere $P = (E, \mathbf{pc}) = (mc / \Delta \tau) (c \Delta t, \Delta \mathbf{x})$ ed osservare che m , c e $\Delta \tau$ sono degli invarianti relativistici (c è lo stesso in ogni riferimento, m e $\Delta \tau$ sono definiti nel riferimento di quiete e dunque sono invarianti), mentre $(c \Delta t, \Delta \mathbf{x})$ è un quadrivettore e dunque $P = (E, \mathbf{pc})$ è un quadrivettore.



La conservazione dell'energia e dell'impulso

- Dimostriamo adesso che se le leggi di conservazione dell'energia e dell'impulso valgono in S allora valgono in S' che si muove con velocità u rispetto ad S.
- Suppongo che in S siano vere:

$$3a) \quad (\mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B)_{\text{prima}} = (\mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B)_{\text{dopo}} \quad 3b) \quad (E_A + E_B)_{\text{prima}} = (E_A + E_B)_{\text{dopo}}$$

- Introduco il quadrimpulso totale del sistema, $P = P_a + P_b = (E_a + E_b, \mathbf{c}\mathbf{p}_a + \mathbf{c}\mathbf{p}_b)$ e osservo che le 3a) e 3b) le posso riscrivere come una relazione fra quadrivettori:

$$P_{\text{prima}} = P_{\text{dopo}}, \text{ ossia } P_{\text{prima}} - P_{\text{dopo}} = 0.$$

- Se effettuo una trasformazione di Lorentz il quadrivettore nullo va nel quadrivettore nullo, dunque

$$L(P_{\text{prima}} - P_{\text{dopo}}) = L(0) = 0$$

- Per la linearità delle trasformazioni di Lorentz:

$$L(P_{\text{prima}} - P_{\text{dopo}}) = L(P_{\text{prima}}) - L(P_{\text{dopo}}) = 0$$

- e dunque

$$P'_{\text{prima}} = P'_{\text{dopo}}.$$

- In conclusione, abbiamo dimostrato che definendo $\mathbf{p} = m \gamma \mathbf{v}$, si ha $E = m \gamma c^2$ e leggi di conservazione invarianti per trasformazioni di Lorentz.

Ancora sulle relazioni energia-impulso

- Le relazioni fondamentali sono:



dove m è la massa della particella, misurata nel riferimento di quiete.

- Nel limite non relativistico ($v \ll c$), sviluppando in serie di potenze di $(v/c)^2$ ottengo $\gamma \cong 1 + 1/2 (v/c)^2$, da cui:

$$E \cong mc^2 + 1/2 mv^2,$$

cioè l'usuale espressione classica dell'energia cinetica $T = 1/2 mv^2$ a meno di una costante inessenziale nella fisica classica.

- In genere, si definisce l'energia cinetica T come quella associata al moto della particella, quindi $T = E - mc^2$. (Questa espressione si riconduce a $1/2 mv^2$ per basse velocità, ma in generale è diversa).

- Sempre nel limite non relativistico, all'ordine più basso in v/c ho

$$\mathbf{p} = m\gamma \mathbf{v} \cong m \mathbf{v}$$

cioè per $v \ll c$ ritrovo le espressioni classiche per l'energia e l'impulso, e dunque la relatività contiene la meccanica classica come caso limite.

- In genere si misurano gli impulsi e le energie delle particelle. In termini di queste, due espressioni utili per il calcolo di v e γ sono:

$$v/c = cp/E \quad ; \quad \gamma = E/mc^2.$$

- Osservo che se $v \rightarrow c$ allora $\gamma \rightarrow \infty$ e (per un corpo con $m \neq 0$) e quindi $E \rightarrow \infty$. Occorre dunque un'energia infinita per accelerare un corpo di massa m fino a $v = c$,
ossia la velocità della luce è una velocità limite.

$$E = m\gamma c^2$$

$$\mathbf{p} = m\gamma \mathbf{v}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$$

La massa

- Abbiamo definito la massa di un corpo come quella misurata nel suo riferimento di quiete (ad esempio, da $m = F/a$).
- Le relazioni energia impulso ci permettono di misurare la massa in altri modi, e di generalizzare la definizione.

$$E = m\gamma c^2$$
$$\mathbf{p} = m\gamma \mathbf{v}$$
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$$

- Se considero l'invariante associato al quadrivettore-energia impulso $P=(E, \mathbf{cp})$ trovo:
 $P^2 = E^2 - c^2 \mathbf{p}^2 = m^2 c^4 \gamma^2 - m^2 c^2 \gamma^2 v^2 = m^2 c^4 \gamma^2 (1 - v^2 / c^2) = m^2 c^4$ ossia:

$$E^2 - c^2 \mathbf{p}^2 = m^2 c^4 .$$

- Questo ha varie conseguenze:

1) posso misurare la massa di un corpo in movimento misurando il suo impulso e la sua energia.

2) Posso estendere la definizione di massa a particelle con massa nulla, per cui non esiste un riferimento di quiete. Una particella a massa nulla è tale che $E^2 - c^2 \mathbf{p}^2 = 0$.

- Osservo che per particelle di massa nulla l'impulso e l'energia non sono dati da $E = m\gamma c^2$ e $\mathbf{p} = m\gamma \mathbf{v}$ perché queste espressioni perdono senso nel limite in cui $m \rightarrow 0$.

Per avere E finito con $m \rightarrow 0$ dovrà essere $\gamma \rightarrow \infty$ ossia $v = c$. In effetti, dall'espressione $v/c = pc/E$ (che è indipendente dalla massa) per $E = cp$ ricavo $v = c$, ossia particelle di massa nulla si muovono alla velocità della luce, quale che sia la loro energia.

- Se la luce è descritta da particelle (fotoni) queste sono di massa nulla.

L'ipotesi del fotone e l'effetto fotoelettrico

- Abbiamo visto che se la radiazione e.m. è trasportata da particelle, queste devono avere massa nulla.
- L'ipotesi dei fotoni, che sta alla base della meccanica quantistica, venne introdotta da Planck per ovviare a un paradosso della fisica classica (la divergenza dell'energia irraggiata da un corpo nero) e dedurre la corretta legge dell'emissione del corpo nero.
- La prima prova che la radiazione è portata da particelle consiste nell'effetto fotoelettrico:
 - si osserva che gli elettroni sono strappati dall'atomo solo se la radiazione ha frequenza ν maggiore di una frequenza di soglia ν_0 .

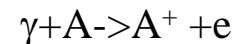
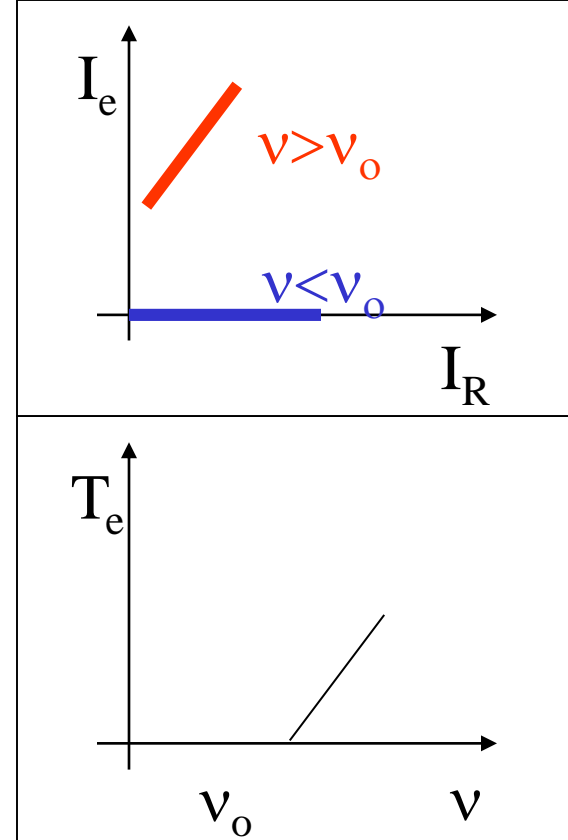
- Per $\nu > \nu_0$ la corrente I_e portata dagli elettroni cresce proporzionalmente con l'intensità della radiazione I_R .

- L'energia cinetica T_e degli elettroni emessi cresce linearmente con la frequenza della radiazione:

$$(1) \quad T_e = h(\nu - \nu_0)$$

dove h è la costante di Planck.

L'interpretazione del fenomeno, dovuta ad Einstein, è che il processo osservato è l'assorbimento di un fotone, di energia $E_\gamma = h\nu$.



La cons. dell'energia dà:

$$E_\gamma = T_e + E_b$$

dove E_b = en. di legame. Se

$$E_\gamma = h\nu \quad h\nu_0: T_e = h\nu - E_b$$

- Il processo può avvenire ($T_e > 0$) solo per $\nu > \nu_0 = E_b/h$,
- T_e è lineare con ν
- Il numero di elettroni emessi è proporzionale al numero dei fotoni incidenti

La massa del fotone

- La radiazione elettromagnetica, descritta dalle equazioni di Maxwell, si propaga nel vuoto con velocità c indipendente dalla frequenza.
- Ne segue che i portatori della radiazione viaggiano a c indipendentemente dalla loro energia, e dunque devono avere massa nulla.
- Un esperimento non potrà mai dimostrare $m_\gamma = 0$. Se il risultato è coerente con $m_\gamma = 0$, potrà dare un limite superiore su m_γ .
- La migliore informazione su m_γ si ha in modo indiretto*. Se $m_\gamma \neq 0$, vengono modificate le equazioni di Maxwell, e quindi i campi elettrici e magnetici generati da cariche e correnti. A distanza r dalle sorgenti i campi diventano
 - $E(r) \rightarrow E(r)\exp(-r/\lambda)$ e $B(r) \rightarrow B(r)\exp(-r/\lambda)$ dove $\lambda = \hbar / m_\gamma c$
- Dunque, il campo di un dipolo magnetico non decrescerebbe come $1/r^3$, ma avrebbe un ulteriore decremento esponenziale.
- Nel 1994, la verifica che il campo magnetico della terra decresce come $1/r^3$ sulle distanze esplorate dal satellite CCE, ha dato che $\lambda > 50 R_{\text{terra}}$ ossia $mc^2 < 6 \cdot 10^{-16} \text{eV}$.

•* *In linea di principio, un processo d'urto come la diffusione Compton (vedi cap.3) è un metodo per misurare m_γ : se $m_\gamma \neq 0$, la relazione energia impulso per i fotoni cambia, e quindi cambia la relazione fra la frequenza e l'angolo, che è sperimentalmente misurabile. In pratica, questo mezzo può dare un limite superiore assai rozzo.*



Effetto Doppler

- Un atomo nel suo riferimento di quiete (S') emette un fotone con frequenza ν_0 . Rispetto al laboratorio S l'atomo si sta muovendo con velocità v . Determiniamo la frequenza ν del fotone nel riferimento del laboratorio S
- Fotoni di frequenza ν hanno $E=h\nu$ e $P=E/c=h\nu/c$. La trasformazione di Lorentz dà:

$$\begin{array}{l} - \text{ in } S' \\ - \text{ in } S \end{array} \quad E' = \gamma(E - \mathbf{v} \cdot \mathbf{P}) = \gamma E [1 - (v/c) \cos \theta]$$

Sostituendo $E' = h\nu_0$ e $E = h\nu$ trovo:

$$\nu = \nu_0 \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - (v/c) \cos \theta}$$

dove θ è l'angolo fra la direzione del fotone e la velocità dell'atomo, misurato nel riferimento del laboratorio S .

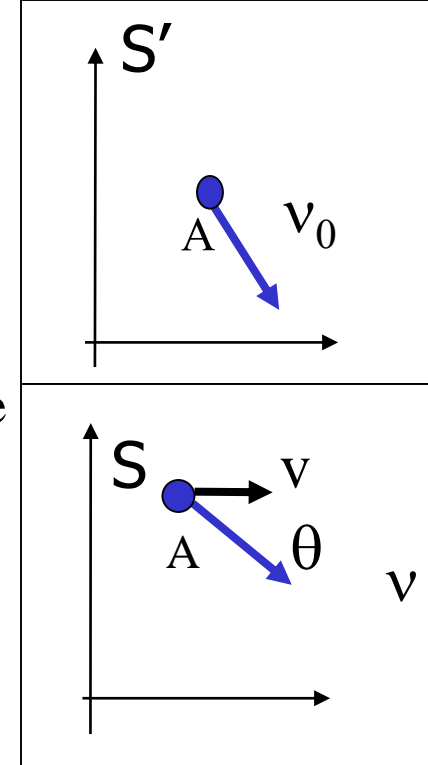
- Se l'atomo e il fotone si muovono in direzioni uguali (opposte) la frequenza del fotone osservato nel laboratorio è $\nu > \nu_0$ ($\nu < \nu_0$) infatti:

$$\cos \theta = 1 \rightarrow \nu = \nu_0 \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}} > \nu_0$$

$$\cos \theta = -1 \rightarrow \nu = \nu_0 \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}} < \nu_0$$

- Oltre a questo fenomeno (effetto Doppler longitudinale), comune alle onde acustiche, si ha un cambiamento di frequenza anche se le direzioni sono ortogonali (effetto Doppler trasversale), che è assente per le onde acustiche.*

*Da notare che per $\epsilon = v/c \ll 1$, l'effetto trasversale è del secondo ordine in ϵ , mentre quello longitudinale è del primo ordine.



Applicazioni dell'effetto Doppler

$$V = V_0 \frac{\sqrt{1-v^2/c^2}}{1-(v/c)\cos\theta}$$

- L'effetto Doppler, cioè il fatto che la radiazione proveniente da una sorgente in moto con velocità v ha frequenza ν diversa da quella nel riferimento di quiete, ν_0 , ha applicazioni importantissime in ogni campo della fisica, su ogni scala di lunghezza.
- Il punto importante è che le frequenze si misurano con grande precisione e quindi si possono effettuare tramite l'effetto Doppler misure accurate delle velocità della sorgente.
- Fra le moltissime applicazioni, ne discuteremo tre, su scale di distanza d assai diverse, che hanno portato a scoperte notevoli:
 - la scoperta di pianeti intorno a stelle vicine a noi, a $d \approx 10$ a.l.*
 - la misura delle velocità di rotazione delle galassie e la scoperta della materia oscura ($d \approx 10^6$ anni luce)
 - La recessione delle Galassie, $d \approx 10^9$ anni luce
- Il principio delle varie misure è comune: si tratta di identificare** una riga ν emessa dalla sorgente e confrontarla con quella corrispondente ν_0 emessa da un atomo nel laboratorio. La misura dello spostamento relativo δ permette di determinare v se conosco la direzione θ della radiazione.
- Solo nell'ultima applicazione, per le Galassie più lontane, è necessario utilizzare la formula completa per δ , mentre per le prime due $v \ll c$ e quindi si può usare l'espressione nel limite non relativistico: $\delta = v/c \cos\theta = v_{//}/c$

$$\delta = \frac{\nu - \nu_0}{\nu_0} = \frac{\sqrt{1-v^2/c^2}}{1-(v/c)\cos\theta} - 1$$

*a.l. = anno luce $\cong 10^{18}$ cm

** Per identificare una riga ν , devo misurarne almeno un'altra ν' . La loro separazione relativa è indipendente dal moto della sorgente, ossia $(\nu - \nu')/\nu = (\nu_0 - \nu'_0)/\nu_0$ e quindi posso cercare fra gli spettri degli atomi in laboratorio quali frequenze ν_0 e ν'_0 soddisfano a questa condizione.

La scoperta dei pianeti extrasolari*

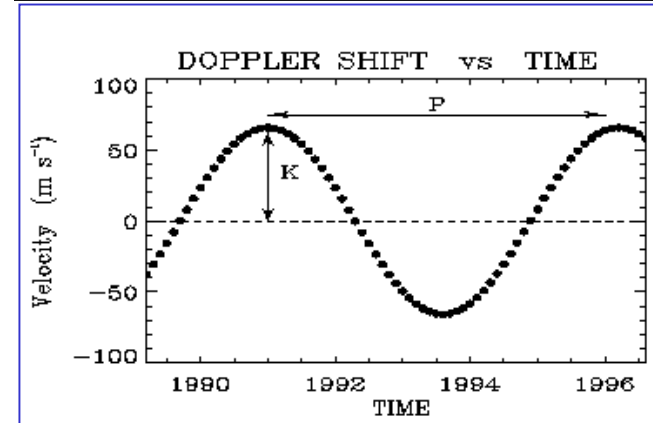
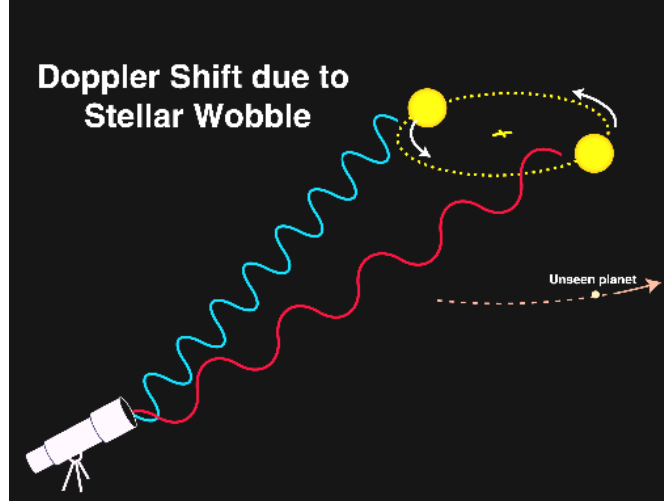
- Consideriamo un pianeta di massa m intorno a una stella di massa M . Anche la stella si muove, attorno al centro di massa del sistema stella+pianeta.
- Dunque la stella si avvicina e si allontana periodicamente da noi e la frequenza della radiazione emessa varia dunque in modo armonico.
- Utilizzando l'approssimazione non relativistica il valore misurato di $\delta(t)$ dà immediatamente

$$V_{//}(t) = K \sin(\omega t)$$

- Si determinano in tal modo K e ω .
- Se il moto del pianeta è circolare uniforme ed avviene in un piano contenente la direzione di osservazione è facile vedere (*v. esercizio*) che questi due dati, insieme con la conservazione dell'impulso, determinano completamente il problema, cioè danno m e il raggio dell'orbita se M è noto**.

* Un sito interessante e' <http://www.obspm.fr/encycl/encycl.html>

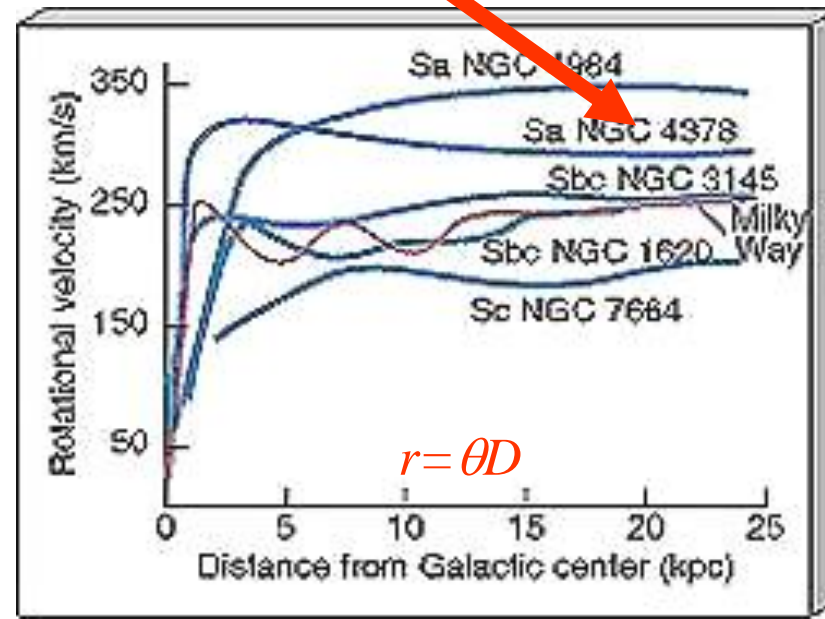
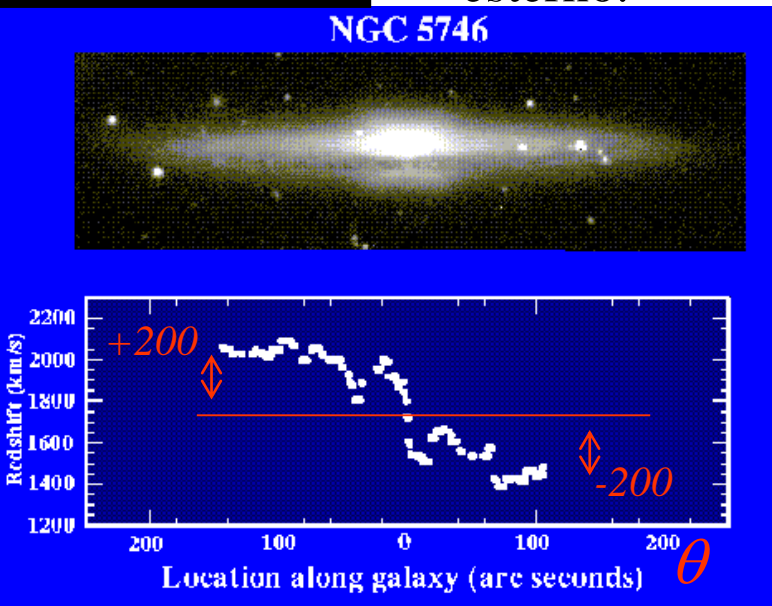
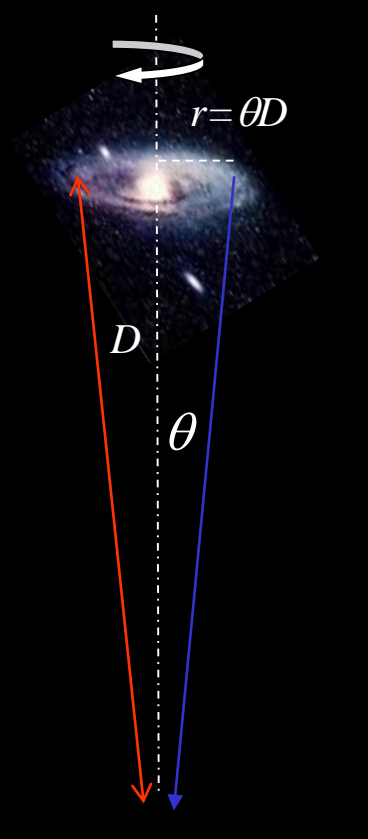
** Nel caso generale l'analisi e' piu' complicata, ma si riesce a determinare l'orbita ed $m \sin i$ (angolo di inclinazione)



- In tal modo sono stati scoperti dal 1995 circa 100 pianeti extrasolari
- Da notare che non sono stati "visti" ma la loro esistenza e' desunta dagli effetti gravitazionali.¹³

Le curve di rotazione delle Galassie

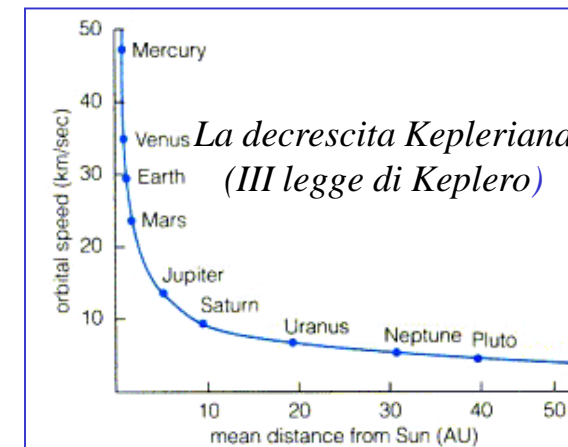
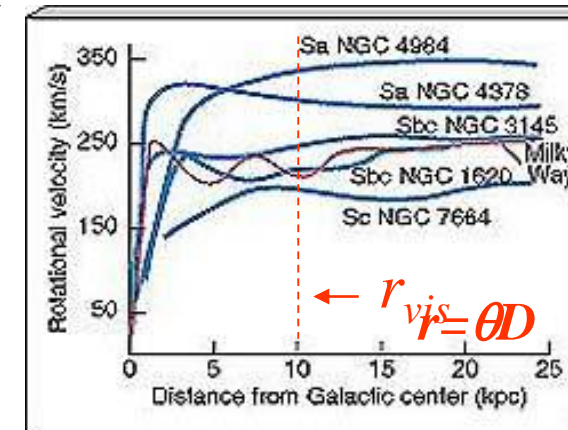
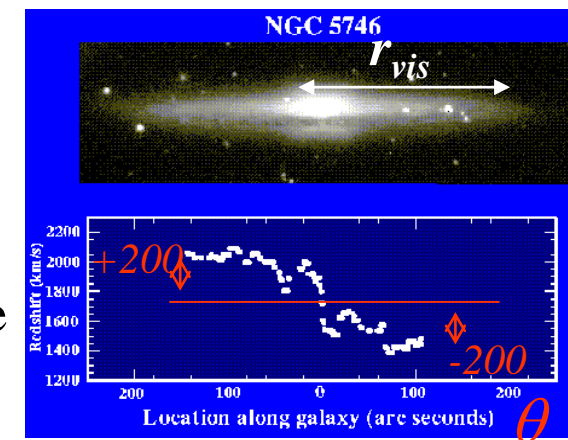
- Le stelle (e tutta la materia) all' interno di una galassia ruotano attorno al centro.
- La radiazione che arriva da regioni diverse porta con sé informazioni sulla velocità della sua sorgente.
- Se misuro lo spostamento di frequenza in funzione dell' angolo posso ricostruire il profilo delle velocità $v = v(\theta)$ all' interno della Galassia.
- Tipicamente, le differenze di velocità fra i due estremi sono dell' ordine di 300-600 km/s.
- Oltre alla velocità delle stelle si misurano anche le velocità del gas (tipicamente la riga a 21 cm dell' H) anche nella zona dove non ci sono più stelle.
- Ogni galassia ha la sua curva di velocità di rotazione, tutte però hanno una caratteristica comune: diventano **piatte** andando verso l' esterno.

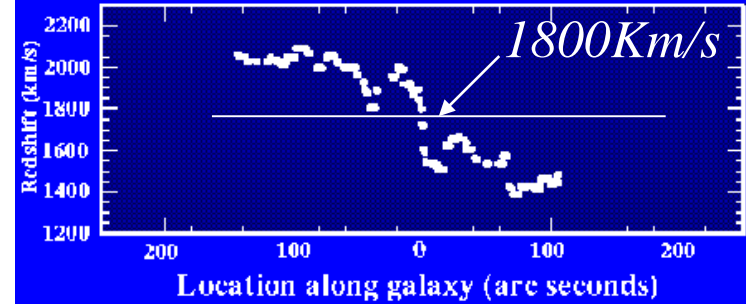
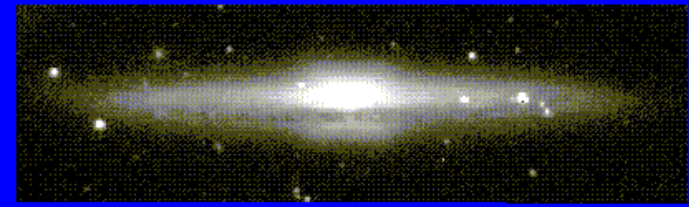


La materia oscura

- La distribuzione di velocità $v(r)$ da' informazioni sulla quantità di materia presente all' interno di r , $M(r)$.
- Se per semplicità suppongo una distribuzione sferica, dal teorema di Gauss ho:

$$v^2(r) = GM(r)/r.$$
- Se non ci fosse più materia oltre r_{vis} , dovrei aspettarmi che per $r > r_{vis}$ $v^2(r) = GM/r$, cioè una decrescita (kepleriana) come succede nel sistema solare.
- Il fatto che $v(r)$ rimanga costante per $r > r_{vis}$, *significa che $M(r)$ cresce proporzionalmente con r .
- **C'è dunque della materia anche ben oltre il raggio visibile. Questa materia è oscura, nel senso che non emette luce.**
- La sua presenza, come per i pianeti extrasolari, è dedotta dagli effetti gravitazionali.
- Si valuta che la materia oscura nell' universo sia dieci volte più abbondante della materia ordinaria (cosiddetta barionica), quella che forma stelle e di cui siamo fatti noi
- La natura della materia oscura è al momento ignota. La sua comprensione e' uno dei problemi più interessanti della fisica di questo momento.
- L'ipotesi più accreditata è che si tratti di un gas di particelle con $m \approx 100m_p$ e con interazioni debolissime, i neutralini, finora mai osservate in laboratorio.
- *Oltre alla velocità delle stelle si misurano anche le velocità del gas (tipicamente la riga a 21 cm dell'H) anche nella zona dove non ci sono più stelle, $r > r_{vis}$.





La recessione delle Galassie

- La galassia dell' esempio precedente, oltre a ruotare su se stessa si sta allontanando da noi con $v=1800$ km/s.
- Questo e' un fatto generale: le galassie si stanno allontanando da noi, con velocità V proporzionale alla loro distanza R

$$V = HR$$

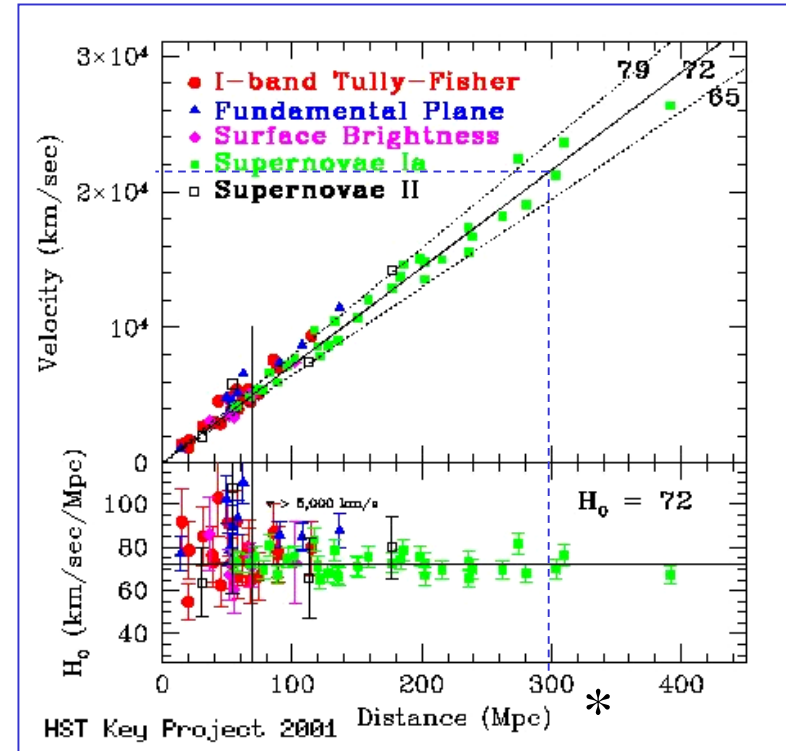
- Questa e' la legge di Hubble, dall' astrofisico che la intuì nel 1929.
- La "costante" di Hubble ha dimensioni $[t]^{-1}$ e vale:

$$H = (0.72 \pm 0.07) 10^{-10} \text{ anni}^{-1}.$$

- Una galassia a distanza $R = 10^9$ a.l. ha dunque:

$$V = 0.072c = 2.1 \cdot 10^4 \text{ km/s}$$

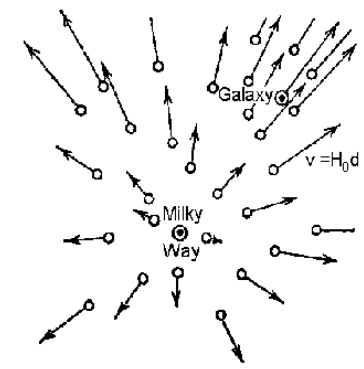
- (Su questa scala, posso ancora usare l' espressione non relativistica)



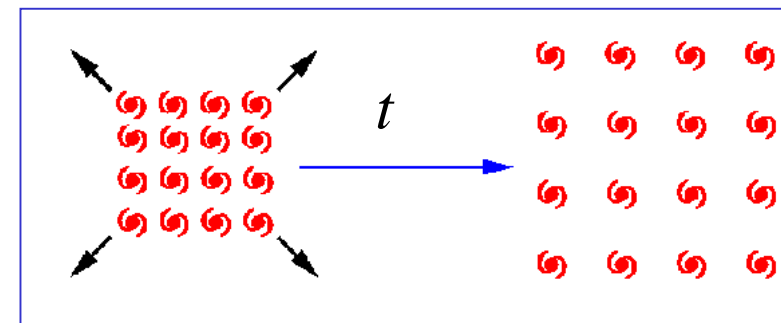
• $1 \text{ pc} = 1 \text{ parsec} = 3.16 \text{ a.l}$

L'età dell'universo

- Da un lato, la legge di Hubble ha un'interpretazione molto semplice
- Supponiamo che un tempo $t=0$ tutta la materia che osservo oggi fosse condensata in una piccola regione di spazio e che da lì si sia espansa **liberamente**, con velocità v diverse.
- Oggi ($t=T$) vedo più lontana quella materia che va a velocità maggiore, la relazione essendo $R=V T$
- E' dunque naturale che il rapporto $H=V/R$ non dipenda dalla galassia, poiché $H=1/T$, cioè l'età dell'universo, trascurando le interazioni della materia, e':
$$T=1/H= (13.8\pm 1.4)10^9 \text{ anni}$$
- Da notare che la "costante" di Hubble "(=lo stesso numero per tutte le Galassie) in realtà cambia continuamente nel tempo, $H=1/t$.
- La recessione delle Galassie contraddice l'ipotesi di un universo stazionario ed è una dei "pilastri" della teoria del big-bang.



- La legge di Hubble, unita al principio cosmologico (non esiste un osservatore privilegiato, ma l'universo deve apparire lo stesso da dovunque lo si guardi) richiede che la distanza fra due qualunque Galassie aumenti con la distanza.
- Questo richiede che lo spazio si stia espandendo

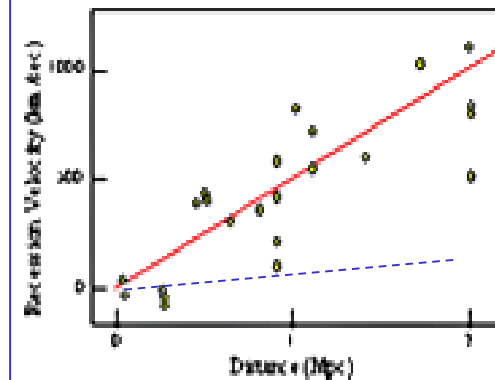


Edwin Hubble

- **Edwin Hubble** was a man who changed our view of the Universe. In 1929 he showed that galaxies are moving away from us with a speed proportional to their distance. The explanation is simple, but revolutionary: the Universe is expanding.
- Hubble was born in Missouri in 1889. His family moved to Chicago in 1898, where at High School he was a promising, though not exceptional, pupil. He was more remarkable for his athletic ability, breaking the Illinois State high jump record. At university too he was an accomplished sportsman playing for the University of Chicago basketball team. He won a Rhodes scholarship to Oxford where he studied law. It was only some time after he returned to the US that he decided his future lay in astronomy.
- In the early 1920s Hubble played a key role in establishing just what galaxies are. It was known that some spiral nebulae (fuzzy clouds of light on the night sky) contained individual stars, but there was no consensus as to whether these were relatively small collections of stars within our own galaxy, the '[Milky Way](#)' that stretches right across the sky, or whether these could be separate galaxies, or 'island universes', as big as our own galaxy but much further away. In 1924 Hubble measured the distance to the Andromeda nebula, a faint patch of light with about the same apparent diameter as the moon, and showed it was about a hundred thousand times as far away as the nearest stars. It had to be a separate galaxy, comparable in size our own Milky Way but much further away.
- Hubble was able to measure the distances to only a handful of other galaxies, but he realised that as a rough guide he could take their apparent brightness as an indication of their distance. The speed with which a galaxy was moving toward or away from us was relatively easy to measure due to the Doppler shift of their light. Just as a sound of a racing car becomes lower as it speeds away from us, so the light from a galaxy becomes redder. Though our ears can hear the change of pitch of the racing car engine our eyes cannot detect the tiny red-shift of the light, but with a sensitive spectrograph Hubble could determine the redshift of light from distant galaxies.
- The observational data available to Hubble by 1929 was sketchy, but whether guided by inspired instinct or outrageous good fortune, he correctly divined a straight line fit between the data points showing the redshift was proportional to the distance. Since then much improved data has shown the conclusion to be a sound one. Galaxies are receding from us, and one another, as the Universe expands. Within General Relativity, the theory of gravity proposed by Albert [Einstein](#) in 1915, the inescapable conclusion was that all the galaxies, and the whole Universe, had originated in a Big Bang, thousands of millions of years in the past. And so the modern science of [cosmology](#) was born.
- Hubble made his great discoveries on the best telescope in the world at that time - the 100-inch telescope on Mount Wilson in southern California. Today his name carried by the best telescope we have, not on Earth, but a satellite observatory orbiting our planet. The Hubble Space Telescope is continuing the work begun by Hubble himself to map our Universe, and producing the most remarkable images of distant galaxies ever seen, many of which are available via the World Wide Web.

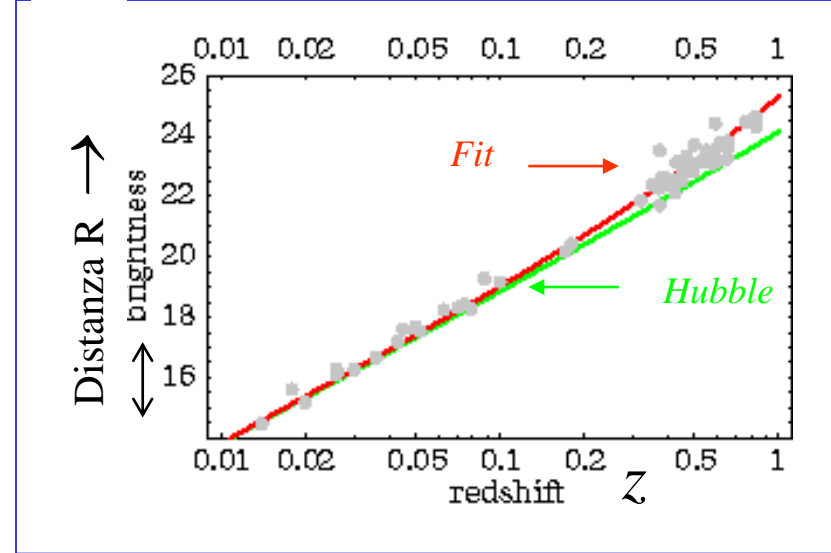


Hubble 1929 ___ Stima odierna ---



L'espansione accelerata e l'energia oscura

- La legge di Hubble $V=HR$ corrisponde a un'espansione uniforme dello spazio.
- E' naturale chiedersi se l'espansione sia effettivamente uniforme, o se non ci siano accelerazioni o decelerazioni in questo processo.
- Per vedere questo effetto, occorre osservare molto indietro nel tempo, in quanto una accelerazione da' un effetto sulla velocità che cresce col trascorrere del tempo.
- Questo richiede guardare molto lontano nello spazio, al moto di quei corpi in cui v e' confrontabile con c .
- In questo caso occorre usare la formula completa per l'effetto Doppler, e introdurre il parametro di redshift $z=(\lambda-\lambda_0)/\lambda_0$
- Da una serie di osservazioni negli ultimi anni e' emerso che la luminosità delle "candele campione" (SNIa) decresce con z più di quanto previsto dalla legge di Hubble, cioè per una determinata velocità le SNIa sono a distanza maggiore di quanto previsto dalla legge di Hubble



- Ciò si interpreta come una espansione accelerata dell' universo.
- Questa espansione non può essere spiegata dalle interazioni gravitazionali di materia (inclusa la materia oscura) e radiazione, che darebbero semmai un effetto di decelerazione.
- L'espansione accelerata richiede una nuova forma di energia, che permea tutto l' universo e che ha un' equazione di stato inusuale: mentre materia e radiazione hanno equazioni di stato del tipo $\Delta P= k\Delta U$ con $k>0$, per questa forma di energia la costante e' negativa.
- Questa energia oscura, di cui si sa pochissimo, pare essere il costituente principale dell' energia dell' universo.

Il contenuto energetico dell' Universo

- A ogni tipo di materia, radiazione, campo di forze posso associare una densità di energia:

$$U = \text{energia/volume.}$$

- Ad esempio, se ho un gas di protoni, con densità (in numero) n_p e energia media $\langle E_p \rangle$:

$$U_p = n_p \langle E_p \rangle.$$

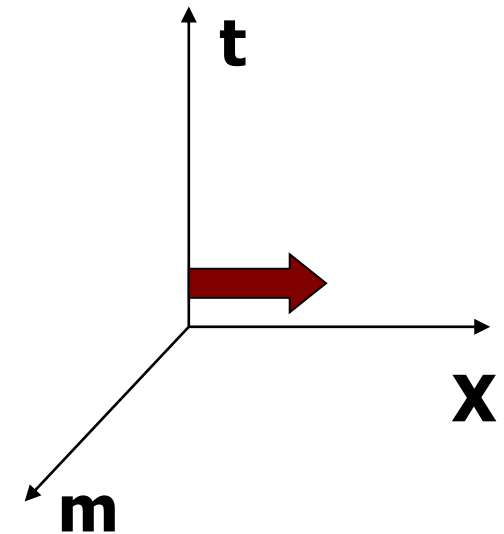
- La radiazione in fotoni e neutrini prodotta nel big bang supera di gran lunga quella prodotta dalle stelle durante la vita dell' universo.
- Il contributo dominante all'energia dell'universo viene dall'energia oscura e quindi dalla materia oscura, che sono in rapporto di circa 2/1.
- Un contributo minoritario al totale è costituito dalla materia detta barionica cioè quella per noi ordinaria, costituita da protoni, nuclei atomici ed elettroni.

sorgente	U_i [eV/cm ³]	stato
γ	$2.5 \cdot 10^{-2}$	Osservata (CMB)
ν	$\approx (1-100)$	Predetti dal Big Bang
Materia barionica	$\approx 2.5 \cdot 10^2$	osservata
Materia oscura	$\approx 1.5 \cdot 10^3$	dedotta da effetti gravitazionali
Energia oscura	$\approx 3 \cdot 10^3$	Dedotta dall' espansione accelerata

- La materia barionica è costituita per $\frac{3}{4}$ da H e per $\frac{1}{4}$ da He, sintetizzato per la maggior parte nel big bang.
- Solo circa 1 % è rappresentato da elementi più pesanti, formati nelle stelle.

L'eredità di Copernico

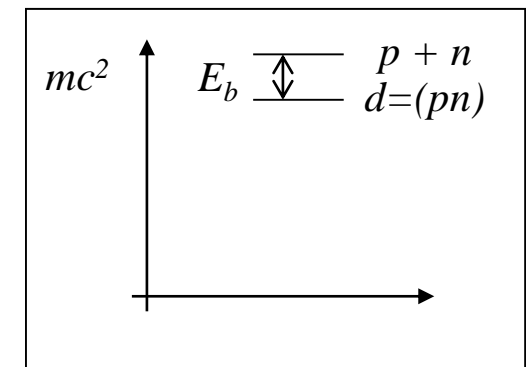
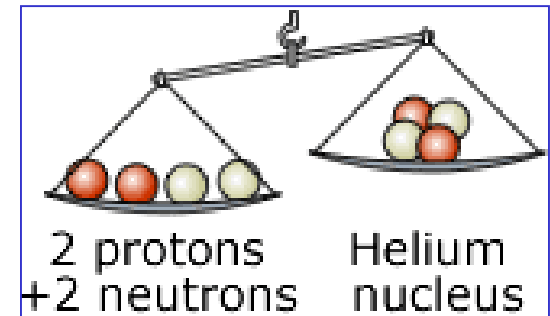
- Quale è la relazione fra l'uomo e l'universo per ciò che riguarda lo spazio, il tempo e la "materia"?
- **x)** Copernico ci ha spostato dal centro dell'universo alla periferia del sistema solare. Oggi sappiamo di essere in uno di **tanti sistemi solari**, alla periferia della Galassia, una fra 10^{11} Galassie nell'universo visibile.
- **t)** Oggi sappiamo che siamo collocati a circa 13 Gyr da un evento particolare, il big bang.
- **m)** Siamo fatti di un costituente particolare e raro della materia-energia dell'universo.



Scale di massa nell'universo

- In natura troviamo scale di masse estremamente diverse.
- Interpretiamo la massa di un oggetto in termini delle masse (ed energie) dei loro costituenti
- Quando arriviamo nel mondo nucleare e subnucleare scopriamo che le energie si sommano, e non le masse.
- Ad esempio, un deutone e' costituito da un protone e da un neutrone, ma si ha :
 $m_p c^2 = 938.272 \text{ MeV}$ ed $m_n c^2 = 939.565 \text{ MeV}$
da cui : $m_p c^2 + m_n c^2 = 1877.837 \text{ MeV}$
mentre: $m_d c^2 = 1875.612 \text{ MeV}$
- La massa di un nucleo di deuterio e' minore della somma delle masse dei suoi costituenti.
- Ossia, l'energia contenuta in un nucleo di deuterio e' minore di quella contenuta nei suoi costituenti per una quantità (energia di legame)

corpo	massa [kg]	costituenti
galassia	$\approx 10^{41}$	$\approx 10^{11}$ stelle
stella	$\approx 10^{30}$	$\approx 10^{57}$ "atomi"
atomo	$(1-100) 10^{-27}$	e + nuclei
nucleo	$(1-100) 10^{-27}$	$(1-100) p + n$
p	$1.67262 10^{-27}$	u+u+d
n	$1.67493 10^{-27}$	u+d+d



$$E_b = m_p c^2 + m_n c^2 - m_d c^2 = 2.225 \text{ MeV}$$

Il problema delle masse

- Un protone ($m=1.6 \cdot 10^{-24}$ g o $mc^2=938$ MeV) è costituito da tre quarks, ciascuno dei quali con $mc^2 \approx 1$ MeV.
- Al nostro livello attuale di conoscenza, la materia “ordinaria” è costituita da due tipi di costituenti (e le loro antiparticelle):
 - - leptoni, raggruppati in tre famiglie (e, ν_e) (μ, ν_μ) (τ, ν_τ).
 - -quarks, anch’essi raggruppati in tre famiglie (u,d) (s,c) (t,b)
- I costituenti più leggeri sono i neutrini. Non si conoscono le loro masse individuali, ma si sa che:
$$0.03 \text{ eV} < \Sigma m_i c^2 < 9 \text{ eV}^*$$
- Il costituente più pesante è il quark top,
$$m_t c^2 = 1.75 \cdot 10^{11} \text{ eV}$$
- Le masse di questi costituenti variano su un intervallo di circa 12 ordini di grandezza e non c’è al momento una spiegazione di questa caratteristica.

Leptoni

particella	mc^2 (MeV)	Carica [e]
e	0.511	-1
ν_e	?	0
μ	105.7	-1
ν_μ	?	0
τ	1777.	-1
ν_τ	?	0

Quarks

particella	mc^2 (MeV)	Carica [e]
u	1.5-4.5	2/3
d	5-8.5	-1/3
s	80-155	-1/3
c	$(1-1.4) \cdot 10^3$	2/3
b	$(4-4.5) \cdot 10^3$	-1/3
t	$(174. \pm 5) \cdot 10^3$	2/3

*Recenti esperimenti di CMB²³
suggeriscono $\Sigma m_i c^2 < 1 \text{ eV}$

Qualche riflessione sulla definizione di massa

- Abbiamo iniziato con corpi fermi e isolati, definendo per questi la massa come il rapporto fra la forza applicata e l'accelerazione impressa.
- Abbiamo esteso la definizione tramite $m^2c^4 = E^2 - p^2c^2$. Anche se non posso fermare un corpo (come nel caso del fotone), posso isolarlo e misurare il suo impulso e l'energia, ad esempio misurando quanta energia e impulso può cedere.
- Nel definire la massa di un quark si è fatta una ulteriore estensione.
- Non posso isolare un quark dagli altri in un protone, perché ciò richiede una energia infinita (confinamento dei quark)*. Posso però introdurre la loro massa osservando che negli urti ad alta energia con elettroni i quarks si comportano come particelle con impulsi ed energie ben definiti e in relazione fissa: $m_q^2c^4 = E_q^2 - p_q^2c^2$.
- **Si ritiene che ad altissime temperature ($kT \approx 100-300 \text{ MeV} \approx (1-3)10^{12} \text{ } ^0K$) la materia si possa trasformare in un plasma di quark e gluoni. I quarks possono muoversi all'interno di questo plasma, e in questo interno sono approssimativamente liberi, tuttavia non posso concettualmente isolarli.*

La massa non è la somma delle masse

- La massa M di un corpo è definita tramite la relazione

$$M^2c^4 = E^2 - \mathbf{P}^2c^2$$

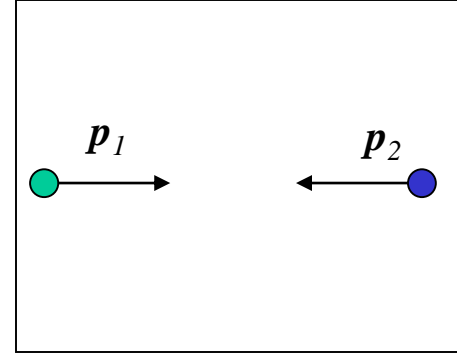
dove E è l'energia totale portata dal corpo e \mathbf{P} l'impulso totale.

- Se mi metto in un riferimento in cui $\mathbf{P}=0$ la massa del corpo è data dal suo contenuto in energia E :

$$M = E/c^2 \quad \text{per } \mathbf{P}=0$$

- Se il corpo è composto da costituenti (elettroni, nucleoni, quarks...) la massa del corpo non è la somma delle masse dei costituenti, per due ragioni:
 - 1) ciascuno dei costituenti porta dell'energia associata al suo movimento e questa contribuisce alla massa del corpo.
 - 2) le interazioni fra i costituenti generano dell'energia, che contribuisce al contenuto di energia totale del corpo, e dunque alla sua massa.
- Esamineremo in dettaglio queste due affermazioni.

$M \neq \sum m_i$: il ruolo del moto dei costituenti



- Consideriamo un sistema composto da due costituenti, di massa m_1 ed m_2 e supponiamo che gli impulsi dei costituenti siano uguali ed opposti:

$$\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}.$$

- Ciascuno di questi porta dunque un'energia

$$E_i = \sqrt{(p_i^2 c^2 + m_i^2 c^4)}.$$

- Se i due corpi non interagiscono, l'energia totale E è la somma delle energie, e lo stesso vale per l'impulso \mathbf{P} , dunque:

$$E = E_1 + E_2 = \sqrt{(p_1^2 c^2 + m_1^2 c^4)} + \sqrt{(p_2^2 c^2 + m_2^2 c^4)} ; \quad \mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{0}$$

- Da $M^2 c^4 = E^2 - P^2 c^2$ segue che per la massa M del sistema vale $Mc^2 = E_1 + E_2$ e quindi:

$$Mc^2 = \sqrt{(p^2 c^2 + m_1^2 c^4)} + \sqrt{(p^2 c^2 + m_2^2 c^4)}.$$

- Da questa segue che $Mc^2 \geq m_1 c^2 + m_2 c^2$ cioè la massa di un sistema formato da particelle non interagenti è maggiore o uguale della somma delle singole masse.
- In generale ho:

$$M^2 c^4 = m_1^2 c^4 + m_2^2 c^4 + 2(E_1 E_2 - c^2 \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2)$$

La quantità fra () è $\geq m_1 m_2 c^4$ * da cui ancora $M \geq m_1 + m_2$.

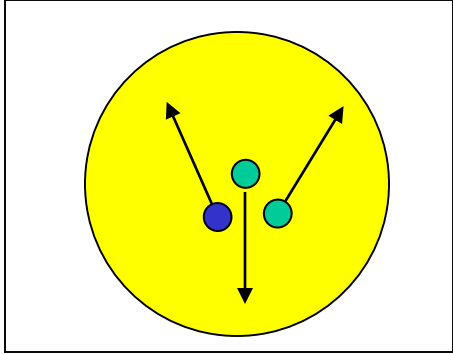
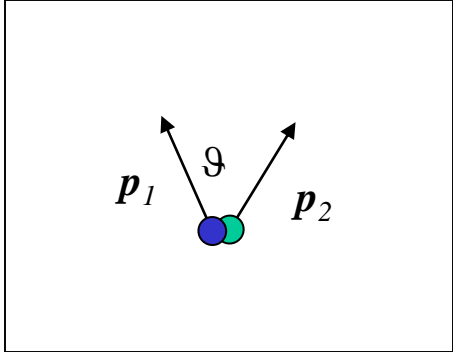
Osservazioni

- Un fotone ha massa nulla ($m_\gamma=0$) ma un sistema di due o più fotoni in generale ha $M(\gamma\gamma) \neq 0$. Infatti dalla relazione del paragrafo precedente e da $E=pc$ ho:

$$M^2(\gamma\gamma)c^4 = m_\gamma^2c^4 + m_\gamma^2c^4 + 2(E_1E_2 - c^2 \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2) = 2 E_1E_2(1 - \cos\vartheta)$$

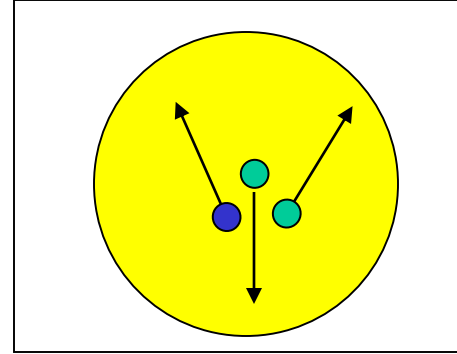
Ne segue che $M^2(\gamma\gamma) = 0$ solo se $\cos\vartheta = 1$ cioè se i due fotoni sono allineati.

- Il raggio del protone è circa $r_p \approx 10^{-13}$ cm. I quarks al suo interno sono dunque confinati in una regione dell'ordine di r_p . Per il principio di indeterminazione devono avere un impulso almeno pari a $p = \hbar/r_p$. Posso calcolare facilmente pc osservando che $\hbar c \cong 200$ MeV fm. Ne segue: $pc \approx 200$ MeV.
- L'energia portata da ciascun quark (due u e un d) è data da $E_q = \sqrt{p^2c^2 + m_q^2c^4}$. Poiché $m_{u,d}c^2 \approx \text{MeV}$ il termine di massa è trascurabile rispetto al termine dell'impulso. Ne segue che per ciascun quark $E_q \cong pc \approx 200$ MeV.
- Si comprende dunque come il protone possa avere essere $m_p c^2 \approx 900$ MeV, pur essendo costituito da quarks con massa $m_{u,d} c^2 \approx \text{MeV}$



Nota: una relazione spesso utile è:
 $\hbar c = 197.3 \text{ MeV fm} = 1.973 \cdot 10^{-5} \text{ eV cm}$

Il moto dei costituenti nei nucleoni*, nuclei ed atomi



- Utilizzando il principio di indeterminazione, abbiamo appena visto che il moto dei quarks all' interno di un protone è estremamente relativistico. Ci chiediamo che succede nei nuclei e negli atomi
- Le dimensioni di un nucleo* leggero sono $r_n \approx 1 \text{ fm}$. Per il principio di indeterminazione, un protone (o un neutrone)* che si muove al suo interno deve avere $p \approx \hbar / r_n$ e quindi:

$$pc \approx \hbar c / r_n \approx 200 \text{ MeV}$$

- Per questo valore di pc l'energia portata da un nucleone nel nucleo è dunque:

$$E_p = \sqrt{(p^2 c^2 + m_p^2 c^4)} \cong m_p c^2 + p^2 / (2m_p) .$$

L'energia cinetica è dunque: $T = E_p - m_p c^2 \cong p^2 / m_p \cong 20 \text{ MeV}$.

- Pur avendo lo stesso impulso che il quark, posso usare la meccanica non relativistica, per descrivere il suo moto, poiché la massa del protone è ben più grande.
- Per gli atomi, so che le dimensioni sono $r_n \approx 10^5 \text{ fm}$. Gli elettroni hanno dunque impulso 5 ordini di grandezza più piccolo, $pc \approx 2000 \text{ eV} \ll m_e c^2$, dunque valgono le formule non relativistiche e le loro energie cinetiche sono dell'ordine di qualche eV.

*I raggi nucleari sono dati approssimativamente da $r = 1.1 \text{ fm } A^{1/3}$ dove $A = N_p + N_n$ è il numero di massa

**Si chiamano nucleoni i costituenti dei nuclei, cioè i protoni e i neutroni

$M \neq \sum m_i$: il ruolo delle interazioni fra i costituenti

- Finora non abbiamo considerato le interazioni fra i costituenti di un sistema. Li abbiamo considerati liberi ed a ciascuno abbiamo associato un'energia "meccanica" $E_i = \sqrt{(p_i^2 c^2 + m_i^2 c^4)}$.
- Se due corpi interagiscono compaiono altre forme di energia, nei corsi precedenti definita come energia potenziale $V(r)$, dove r è la distanza dei due corpi.
- **Questa rappresenta il contributo all'energia dovuto al campo di forze generato dai costituenti.**

• L'energia totale del sistema è data dall'energia dei suoi costituenti e dall'energia U_{campo} portata dal campo di forze:

$$E = \sqrt{(p_1^2 c^2 + m_1^2 c^4)} + \sqrt{(p_2^2 c^2 + m_2^2 c^4)} + U_{\text{campo}}$$

*Esercizio: dimostrare che $(1/4\pi) \int dv (\mathbf{E}_e \cdot \mathbf{E}_p) = -e^2/r$ (v. Jackson cap. 1.11)

- Ad esempio, un elettrone e un protone, generano un campo elettrico $\mathbf{E}_e + \mathbf{E}_p$ cui è associata un'energia:

$$\begin{aligned} U_{\text{camp}} &= (1/8\pi) \int dv \mathbf{E}^2 = \\ &= (1/8\pi) \int dv (\mathbf{E}_e + \mathbf{E}_p)^2 \\ &= (1/8\pi) \int dv \mathbf{E}_e^2 + (1/4\pi) \int dv \mathbf{E}_p^2 \\ &\quad + (1/4\pi) \int dv (\mathbf{E}_e \cdot \mathbf{E}_p) \end{aligned}$$

- I primi due termini non dipendono dalla distanza r fra e e p . Sono dei termini intrinseci alle particelle (self-energie).
- L'ultimo termine invece dipende da r , e vale: $(1/4\pi) \int dv (\mathbf{E}_e \cdot \mathbf{E}_p) = -e^2/r$, cioè quella che era stata chiamata $V(r)$.
- L'energia potenziale rappresenta dunque di quanto è variata l'energia del campo di forze, quando ho avvicinato i corpi a una distanza finita r^* .
- L'energia del campo è un contributo all'energia totale del corpo, e dunque alla sua massa.

Massa ed energia di legame

- L'energia di legame E_b di un corpo di massa M è l'energia necessaria per separare i suoi costituenti (di massa m_i):

$$E_b = \sum m_i c^2 - M c^2$$

- Questa è una buona definizione per nuclei, atomi, molecole, solidi... *)
- L'energia di legame tiene conto delle interazioni dei costituenti e del loro moto all'interno del sistema.
- Il valore dell'energia di legame è caratteristico del tipo di interazione.
- Ad esempio nel deutone:

$$E_b = (m_p c^2 + m_n c^2) - m_d c^2 = (1877.837 - 1875.612) \text{ MeV} = 2.215 \text{ MeV}$$

mentre nell'atomo di idrogeno:

$$E_b = (m_e c^2 + m_p c^2) - m_H c^2 = 13.6 \text{ eV}$$

- Questi due valori rappresentano le tipiche scale delle energie nucleari (1MeV) e delle energie atomiche (1eV).
- Il fatto che le energie di legame nucleare siano 10^6 volte maggiori di quelle atomiche corrisponde al fatto che le interazioni (cosiddette forti) che legano i nucleoni (p,n) nel nucleo sono molto più robuste dell'interazione e.m. che lega gli elettroni negli atomi. Questo ha importanti conseguenze, che discuteremo nel prossimo capitolo...
- *)Non è una buona definizione per un sistema formato da quarks perché l'energia di due quark tende all'infinito al crescere della loro distanza

Decalogo

1. Il quadrivettore impulso-energia (E, \mathbf{pc}) di una particella di massa m , arbitraria, soddisfa a $E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4$
2. La massa di un corpo con $m \neq 0$ e' l'energia nel suo riferimento di quiete, cioe' se $\mathbf{p} = 0$ $E = mc^2$
3. Per particelle con $m \neq 0$, vale: $\mathbf{p} = m\gamma\mathbf{v}$ $E = m\gamma c^2$; per ogni particella ($m = 0$ o $m \neq 0$) vale $v/c = p/E$
4. In ogni processo si conserva il quadrimpulso totale, cioe' definendo $E_{\text{tot}} = \sum_i E_i$ $\mathbf{P}_{\text{tot}} = \sum_i \mathbf{P}_i$ allora $(E_{\text{tot}})_{\text{prima}} = (E_{\text{tot}})_{\text{dopo}}$ e $(\mathbf{P}_{\text{tot}})_{\text{prima}} = (\mathbf{P}_{\text{tot}})_{\text{dopo}}$
5. L'energia di legame di un corpo E_b e' data dalla differenza fra la massa dei suoi costituenti e quella del corpo: $E_b = \sum_i m_i c^2 - Mc^2$
6. Le energie di legame di atomi e molecole sono dell'ordine di eV, quelle dei nuclei sono dell'ordine di MeV
7. Le dimensioni di atomi e molecole sono dell'ordine dell'angstrom, $1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$, quelle dei nuclei e dei nucleoni sono dell'ordine di fm = 10^{-15} m
8. La materia che conosciamo e' composta di 3 famiglie di quarks e tre famiglie di leptoni
9. Conosciamo quattro campi di forze (interazione forte, elettromagnetica, debole e gravitazionale)
10. Esistono nell'universo altre forme di materia ed energia oltre a quelle descritte dai quarks, leptoni e dalle loro 4 interazioni

Esercizi

- Un atomo di sodio nel suo riferimento di quiete emette fotoni con lunghezza d'onda $\lambda_0=5890$. Nel riferimento del laboratorio si muove con velocità $v=300\text{m/s}$. Calcolare la lunghezza d'onda nel riferimento del laboratorio, se a) l'atomo si sta muovendo verso l'osservatore, b) in direzione opposta c) a 90° .
- Un π_0 nel riferimento di quiete emette due fotoni, ciascuno con energia $E=67.5\text{MeV}$. Nel riferimento del laboratorio $\gamma=10$. Calcolare le energie dei due fotoni che, nel riferimento del laboratorio, viaggiano parallelamente al pione.
- Dimostrare che se il moto del pianeta di massa m intorno a una stella di massa $M \gg m$ è circolare uniforme valgono le seguenti relazioni:

$$\omega^2 r^3 = GM \quad \text{e} \quad vm = VM.$$

- Sapendo che $\delta=(v-v_0)/v_0=10^{-7} \cos(t/100 \text{ giorni})$, $M= M_{\text{sole}}$ e supponendo che il moto del pianeta avvenga in un piano contenente la direzione di osservazione determinare m ed r .
- Un muone ($m= 105 \text{ MeV}/c^2$) ha energia $E=1\text{GeV}$. Calcolare l'impulso, la velocità e il fattore di Lorentz.
- Calcolare la massa del sistema di due fotoni, ciascuno con energia di 1eV , che viaggiano a) nella stessa direzione b) in direzioni opposte c) in direzioni fra loro perpendicolari.

